PARTS OF THE ORIGINAL DOCUMENT

ARE OF POOR REPRODUCTIVE QUALITY

CERTAINES PARTIES DU DOCUMENT ORIGINAL

SONT DE PIÈTRE QUALITÉ DE REPRODUCTION

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

CASE POSTALE 6128, STATION A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

MODELE DE COMPORTEMENT DES CLIENTS DU TRANSPORT AERIEN

par

François Soumis*

*Département des Méthodes Quantitatives,
Ecole des Hautes Etudes Commerciales,
Montréal, Canada

Ce travail a été subventionné en partie par un octroi du
Centre de Recherche et de Développement de Transports Canada

Université de Montréal
Centre de recherche sur les transports - Publication # 119
Décembre 1978

Dépôt légal - 1er trimestre 1979

MODELE DE COMPORTEMENT DES CLIENTS DU TRANSPORT AERIEN

F. Soumis

Département des Méthodes Quantitatives, Ecole des Hautes Etudes Commerciales
Montréal, Canada

Résumé. Le problème est de prédire pour un ensemble de vols offerts par un transporteur aérien, quelle sera la demande pour chaque paire origine-destination et sa répartition entre les vols proposés.

L'approche proposée part d'hypothèses de comportement de chaque passager face à l'attraction et à la disponibilité des routes offertes. Ceci permet de reproduire le comportement égoïste des individus qui prennent la décision de voyager ou non et choisissent leurs itinéraires en fonction de leur seule satisfaction sans se préoccuper de celle des autres ni de l'utilisation rationnelle du service disponible. Le système d'équation non-linéaire obtenu pour un réseau de 300 vols se résoud en moins d'une minute par la méthode de Gauss-Siedel.

Ce modèle permet aux planificateurs de choisir les volset l'horaire en connaissant l'effet sur la clientèle attirée et le remplissage des avions.

Mots clés. Transport aérien; Convergence de méthode itérative; Grand système; Réseau; Equation non-linéaire; Assignation des passagers; Optimisation égoïste.

Abstract. The purpose of this model is to predict from a set of flights offered by an airline, the likely demand for each origin and destination pair and the distribution of this demand between the flights available. The proposed approach is based on certain hypotheses concerning the behaviour of a passenger faced with the relative attractions of various routes and their availability. The model reproduces the selfish behaviour of individuals who decide whether to travel and choose their routes in order to maximise their own satisfaction. They do not consider the satisfaction of others nor the rational utilisation of the service. The system of non-linear equations obtained for a network of 300 flights can be solved in less than a minute using the Gauss-Siedel method.

This model enables planners to choose flight schedules knowing the likely effect on customer demand and aircraft occupancy rates.

Keywords. Air traffic control; Convergence of numerical methods; Iterative methods; Large-scale systems; Network analysers; Nonlinear equations; Transportation; Passengers routing; User optimisation.

INTRODUCTION

Le problème est de prédire pour un ensemble de vols offerts par un transporteur aérien quelle sera la demande pour chaque paire origine-destination et sa répartition entre les vols proposés. Ce sont des questions centrales lors du choix des vols à offrir que de déterminer la réponse du public et d'estimer les revenus d'opérations.

Avant d'aller plus loin précisons le vocabulaire pertinent.

Vol. Défini par l'itinéraire (Montréal-Chicago-Los Angeles), l'heure de départ et d'arrivée, le type d'avion utilisé.

Arc. Une composante sans escale d'un vol (Montréal-Chicago).

Horaire. L'ensemble des vols offerts par un transporteur aérien.

Marché. Un groupe de passagers d'une origine-destination, voulant partir dans un même intervale de temps.

Chaîne. Un chemin d'une origine à une destination, composé d'arcs n'appartenant pas nécessairement au même vol.

Route. Les routes desservant un marché sont définies par les chaînes que peuvent utiliser les passagers de ce marché.

Les deux principaux facteurs influençant la décision de voyager et le choix d'une route sont son attraction et sa disponibilité. L'attraction d'une route est une fonction de l'heure de départ par rapport aux préférences des passagers, de la durée du voyage (nombre d'escales et de transferts) et du service offert (repas, type d'avion, etc.) La disponibilité d'une route dépend de la capacité de ses arcs et du nombre de passagers désirant l'utiliser.

Pour introduire la complexité du problème voyons d'abord certaines propriétés de l'interaction entre l'attraction et la disponibilité.

Pluralité des préférences. Des clients placés dans une même situation ne sont pas tous attirés par la même route mais se répartissent entre des routes offrant des avantages différents.

Variation journalière de la disponibilité. Même si l'utilisation moyenne d'un avion est inférieure à sa capacité, certains jours des clients sont refusés faute de place à cause de la variation stochastique de la demande.

Equilibre demande-disponibilité. La demande influence la disponibilité et inversement des clients peuvent prendre la décision de ne pas voyager si leur route préférée n'est pas disponible.

Optimisation égoïste. Chaque client choisit sa route en fonction de ses préférences sans coopérer pour respecter les préférences des autres.

Interaction entre les passagers. La décision d'un client de voyager avec le transporteur et son choix de route, dépendent de la disponibilité qui, elle, dépend des choix des autres clients.

REVUE DE LA LITTERATURE

Avant de présenter le modèle, la méthode de résolution et la preuve de convergence, situons notre approche dans l'évolution des méthodes de traitement du problème. Les méthodes sont discutées surtout en considérant leurs qualités théoriques, elles sont difficilement comparable du point de vue des résultats n'ayant pas été utilisés pour le même réseau. Cette discussion au point de vue théorique permet d'intégrer les méthodes développées pour les problèmes correspondants du déplacement des automobiles et des passagers du transport en commun.

Heuristiques

Dans tous ces domaines les premières méthodes furent des heuristiques mettant surtout l'emphase sur l'attraction. L'assignation des passagers est réalisée en parcourant séquentiellement les origine-destination et la solution dépend de l'ordre de parcours. Ces modèles reproduisent le comportement égoïste des clients mais font un pauvre traitement de la limite de disponibilité et du réajustement qu'elle impose aux clients en concurrence pour utiliser les mêmes ressources. En transport aérien ce type de modèles fut surtout développé par des groupes internes aux compagnies et n'a pas toujours donné lieu à publication. Quelques modèles ont été publiés par Gagnon (61), Gunn (64) et Kingsley (68). Ces modèles sont difficilement utilisables pour évaluer l'effet d'une modification d'horaire, car la modification en changeant le déroulement de l'heuristique peut perturber la solution et noyer l'effet réel de la modification.

Programmation linéaire

Une famille de modèles basé sur la programmation linéaire est apparue avec les travaux de Charnes et Cooper (61). De nombreuses variantes ont été proposées entre autres par Simpson (69), Agin (72), Swann (72), Price (74), Richardson (74), Daigle (76) et Scarbrough(77). La circulation des passagers est traitée comme un flot de plusieurs commodités utilisant un même réseau, les passagers de chaque origine-destination formant une commodité. Les bornes communes associées à la limite de capacité sur chaque arc rendent très coûteuse la résolution de ce type de problème pour les grands réseaux. Leur principal avantage par rapport aux modèles heuristiques est la possibilité par l'analyse de sensibilité d'évaluer de façon simple et significative les effets d'une modification d'horaire. Par contre ces modèles avec leurs objectifs de maximiser la somme des satisfactions des passagers réalisent une optimisation coopérative par opposition à l'optimisation égoïste désirée. De plus la programmation linéaire produit des solutions extrémistes où certains avions sont utilisés à la limite permise tandis que d'autres ne le sont pas.

Programmation non-linéaire

Un modèle de programmation non-linéaire (Soumis,78a) que j'ai développé précédemment produit économiquement des solutions moins extrémistes. Ce modèle s'obtient des précédents en enlevant la contrainte de capacité et en ajoutant à l'objectif une pénalité correspondant aux revenus perdus en refusant des passagers faute de places. Même s'il donne des résultats approchant la réalité ce modèle reproduit l'optimisation coopérative.

Optimisation égoïste

Cette difficulté a été contournée en transport automobile par Dafermos (71) dans le cas où le temps de parcours d'un arc ne dépend que du flot sur cet arc. Elle a montré que l'optimisation égoïste où chaque automobiliste minimise son temps de déplacement se ramène à un pro-

blème de flot avec objectif non-linéaire. Des méthodes de résolutions efficaces pour ces problèmes ont été développées par Nguyen (74) et Leblanc (73). Le cas plus général du transport automobile où le temps de parcours d'un arc dépend des flots sur tous les autres arcs a été traité par Magnanti (77). Dans ce cas l'optimisation égoïste ne se ramène pas à un problème de programmation mathématique. Il s'agit plutôt de problème de complémentarité non-linéaire pour lesquels il n'existe pas encore de méthodes efficaces pour résoudre les grands problèmes.

En transport aérien l'optimisation égoïste n'avait pas encore été traitée de façon analytique et c'est ce que fait ce travail.

LE MODELE PROPOSE

Plutôt que de postuler a priori une structure de modèle mathématique qu'il faut pondérer par la suite pour approcher la réalité, partons d'hypothèses décrivant le comportement des passagers et trouvons les équations caractérisant la situation résultante. Le système d'équation obtenu ne se ramène pas à un problème de programmation mathématique mais se résout efficacement par la méthode de Gauss-Siedel. La définition du modèle à partir d'hypothèses de comportement le rend plus intelligible par les gestionnaires et sa structure mathématique permet les analyses de sensibilité pour la planification de l'horaire.

Précisons maintenant le réseau utilisé par les passagers d'une origine-destination qui est présentée à la "Fig. 1". Le réseau est défini en terme des chaînes utilisables par les passagers. Rappelons qu'une chaîne est une suite d'arcs qui permet aux passagers de se déplacer de son origine vers sa destination en utilisant des escales et des correspondances si nécessaire. Les clients sont regroupés par heure de départ désirée à cause de la variation de l'attraction des routes en fonction de cette heure de départ désirée. Ces groupes de clients sont appelés marchés. Pour chaque marché une route est définie par chacune des chaînes qui attire de ces passagers. Remarquons que les chaînes desservant une même origine-destination n'ont pas d'arcs en commun car ce cas correspond à plusieurs connexions utilisant le même vol et alors seul le meilleur est utilisé. Par contre un arc appartient généralement à plusieurs chaînes desservant des origines-destination différentes. Ainsi les ensembles de routes pour chaque marché, sont disjoints. De plus les routes d'un même marché n'ont pas d'arcs en commun, tandis qu'elles peuvent en avoir si elles appartiennent à des marchés différents.

Un modèle semblable avec autant de marché qu'il y a de chaînes et trois routes accessibles à chaque marché a donné des résultats satisfaisants, (Soumis, 78a).

Processus de décision des passagers

Le choix de voyager et le choix de routes par les passagers résultent d'un processus de décision plus ou moins contraint suivant la congestion du réseau. La "Fig. 2" présente ce processus pour les passagers d'un marché. Il comprend 4 étapes représentées par les points numérotés.

Premièrement les clients choisissent une route suivant leur préférence sans tenir compte de la limite de disponibilité.

Deuxièmement certains sont refusés faute de place, leur nombre dépend de l'interaction entre les arrivées aléatoires des divers marchés et du processus de réservation disposant d'un nombre limité de siège.

Troisièmement certains de ces clients refusés décident de ne pas voyager avec le transporteur tandis que les autres considèrent une route alternative.

La quatrième étape est le choix de routes alternatives par ces clients.

Notation

Avant de discuter en détail les hypothèses de comportements à chaque étape et les équations associées, introduisons les notations nécessaires.

- r Un marché.
- d^0_r Nombre de clients du marché r attirés par l'horaire offert.
- d_r Nombre de clients du marché r qui voyagent
- p Une route. Par définition cette route dessert un seul marché note r_p
- F_a Ensemble des arcs appartenant à la route p
- Q_r L'ensemble des routes accessibles par un marché. Les Q_r sont disjoints.
- x_p Nombre de clients du marché r_p qui essaie d'utiliser la route p
- X Le vecteur des nombres de clients choisissant chacune des routes.
- h_p Nombre de clients du marché r_p qui trouvent place sur la route p
- P_p Nombre de clients refusés pour la route p
- λ_p Proportion des clients refusés sur la route p qui choisissent de ne pas voyager.
- a Un arc. Cet arc peut appartenir à plusieurs routes.
- E_a L'ensemble des routes qui utilisent l'arc a
- f_a Nombre total de passagers qui essaient d'utiliser l'arc a. $f_a = \Sigma_{p \in E_a} x_p$
- σ_a L'écart type de f_a
- c_a Le nombre de siège de l'avion desservant l'arc a

Choix initial de routes

Le choix de routes par les clients est un problème relativement complexe. L'attraction d'une route est fonction de son horaire par rapport à l'heure de départ désiré, des escales et connexions rencontrées, du type d'avion et probablement d'autres facteurs. De plus l'effet des facteurs varie suivant l'origine-destination et le type de clientèle.

Les compagnies aériennes ont généralement accumulé de l'information sur ce point du comportement de leur clientèle. En outre les modèles heuristiques qu'elles ont développés reproduisent cette partie du comportement. Notre hypothèse de comportement dans ce contexte ne décrit pas complètement le choix des clients. Elle indique seulement comment les clients réagissent à l'attraction des routes mais laisse à l'utilisateur la liberté de définir l'attraction suivant le type de clientèle et les conditions de fonctionnement.

Hypothèse 1. Les clients tentent d'utiliser les routes en proportion de leurs coefficients d'attraction.

Rappelons que toutes les routes définies pour un marché attirent des passagers. Ainsi tous les coefficients d'attraction A_p doivent être non nuls. D'autre part pour que ces coefficients correspondent à la proportion des clients qui tentent d'utiliser chaque route posons que

$$\Sigma_{p \in Q_r} A_q = 1$$

Passagers refusés faute de place

Déterminons en fonction des coefficients de variations de la demande journalière de chaque marché et des nombres de clients voulant utiliser chaque route ceux qui ne peuvent, faute de place, utiliser la route désiré. La discussion doit considérer la distribution du nombre de clients voulant utiliser chaque arc car c'est à ce niveau qu'intervient la limite de disponibilité. Une étude basée sur les données de 3 mois pour l'ensemble du réseau d'Air Canada confirma l'hypothèse suivante:

Hypothèse 2. Le nombre journalier de passagers voulant utiliser un vol peut être approximé par une distribution normale de paramètres f_a, σ_a.

L'écart type σ_a se calcule à partir des écarts types de la demande de chaque marché. Il devient facile de calculer $Z_a(f_a)$ l'espérance du nombre de clients refusés faute de place sur l'arc a.

$$Z_a(f_a) = \sigma_a \frac{e^{-1/2\rho^2}}{\sqrt{2\pi}} + \rho \int_\rho^\infty \frac{e^{-1/2x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx \qquad (1)$$

avec $\rho = (c_a - f_a)/\sigma_a$

Le calcul de σ_a et $Z_a(f_a)$ est développé dans (Soumis, 78c).

Quand des clients de plusieurs routes utilisent le même arc l'hypothèse suivante permet de déterminer combien de clients de chacune des routes y sont refusés.

Hypothèse 3. La probabilité d'être refusé faute de place est la même pour tous les passagers voulant utiliser un arc indépendamment du marché d'où ils proviennent.

Cette hypothèse est vérifiée si des sièges sont attribués sur la base premier rendu, premier servi et que les réservations des différents marchés arrivent au hazard. D'autres hypothèses pourraient être traitées. Avec l'hypothèse 3, le nombre de clients de la route p refusés faute de place sur l'arc a est

$$x_p Z_a(f_a)/f_a \qquad (2)$$

Finalement pour évaluer le nombre total de passagers refusés faute de place sur une route de plusieurs arcs, introduisons l'hypothèse suivante

Hypothèse 4. La probabilité qu'un même client soit excédentaire sur plus d'un arc est faible et peut être négligée.

Les erreurs sont minimes par rapport aux simplifications qu'apporte cette hypothèse. D'abord les marchés les plus importants sont servis par des vols directs où n'intervient pas cette hypothèse. De plus les compagnies aériennes utilisent des horaires où la probabilité d'être refusé faute de place est faible. Comme la probabilité qu'un même passager soit en excès sur deux arcs est de l'ordre du carré de la probabilité d'être refusé, elle est pratiquement négligeable. Sous l'hypothèse 4 le nombre de passagers en excès sur la route p s'obtient en prenant la somme sur les arcs constituant cette route

$$F_p(X) = \Sigma_{a \in F_p} x_p Z_a(f_a)/f_a \qquad (3)$$

Effet de la disponibilité sur la demande

Précisons maintenant le comportement des passagers qui détermine la relation offre-demande. L'offre se caractérise par l'attraction et la disponibilité des routes. L'attraction des routes offertes est indépendante de la répartition des passagers et connue a priori. Son effet sur la demande peut donc être traité de façon externe au modèle. A partir de l'attraction des routes définies par l'horaire on détermine d_r^0 le nombre de clients attirés. La disponibilité des routes dépend de la répartition des passagers, son effet sur la demande doit donc être traité simultanément avec le choix des routes. L'effet de la disponibilité sur la décision de voyager ou non découle du comportement suivant

Hypothèse 5. Une proportion λ_p des clients refusés sur une route p choisissent de ne pas

voyager.

En effet les clients attirés par une route, qui y trouvent place voyagent, les autres choisissent une route alternative ou ne voyagent pas. Les coefficients λ_p peuvent être estimés par le système de réservation en compilant les clients qui n'achèteront pas de billet si le vol désiré n'est pas disponible. Le nombre de clients qui refont un choix de routes est donc

$$\Sigma_{p\in Q_r} (1-\lambda_p)P_p(X) \qquad (4)$$

De même le nombre de clients qui choisissent de ne pas voyager est

$$\Sigma_{p\in Q_r} \lambda_p P_p(X) \qquad (5)$$

Choix des routes alternatives

Il faut décrire comment les clients font un deuxième et même troisième choix quand ils ne peuvent utiliser leur premier choix. La "Fig. 3" présente les cheminements possibles quand les clients se répartissent parmi les routes qu'ils n'ont pas encore essayées. Même pour cet exemple ayant seulement 3 routes une partie des flèches a dû être supprimée à cause de l'encombrement. Face à cette complexité nous proposons d'utiliser une hypothèse de comportement légèrement différente qui donne lieu à un modèle beaucoup plus simple. Cette variante que nous appelons hypothèse oubliante s'énonce comme suit:

Hypothèse 6. Les clients ayant été refusés faute de place qui font un autre choix de route se répartissent, en proportion des coefficients d'attractions, entre les routes déjà essayées ou non.

L'hypothèse oubliante n'entraîne pas beaucoup d'erreur même si elle permet à un passager d'essayer deux fois la même route. Ce cas est rare car la probabilité d'être refusé est rarement supérieure à 5% et seulement la fraction A_p de ces passagers réessaie la même route. En pratique les passagers refusés réessaie la même route quand ils demandent cette route pour une autre journée.

Formulation mathématique

Maintenant qu'est précisé le comportement des passagers développons les équations caractérisant la situation résultante.

Suivant les hypothèses 1 et 6 les passagers d'un marché se répartissent entre les routes en proportion des coefficients d'attraction qu'il s'agisse du premier essai ou d'un essai subséquent. Ceci permet de les confondre comme le fait la "Fig. 2" et d'utiliser les variables x_p qui regroupent tous les passagers tentant d'utiliser une route p sans distinction d'essais. La relation de proportionnalité définit les équations suivantes

$$x_p = A_p u_r \quad (\forall p\in Q_r) \qquad (6)$$

La variable u_r indique le nombre total d'essais fait

$$(u_r = \Sigma_{p\in Q_r} x_p)$$

La conservation des passagers définit une autre équation par marché. La somme des nombres de passagers qui tentent d'utiliser chacune des routes doit égaler le total des nombres de passagers qui refont un choix de route et du nombre de passagers attirés. D'où en utilisant le nombre de passagers qui refont un choix de route défini par (3) et (4) à l'aide des hypothèses 2-3-4-5

$$\Sigma_{p\in Q_r} x_p - \Sigma_{p\in Q_r} (1-\lambda_p)P_p(X) - d_r^0 = 0 \qquad (7)$$

Les relations (6) (7) forment un système, comprenant autant d'équations que d'inconnues qui permet d'évaluer les variables x_p et u_r.

La demande s'exprime à partir des x_p en retranchant des clients attirés ceux qui choisissent de ne pas voyager définie en (5)

$$d_r = d_r^0 - \Sigma_{p\in Q_r} \lambda_p P_p(X) \qquad (8)$$

Les nombres de passagers utilisant chacune des routes se calculent en fonction des x_p en retranchant des clients attirés ceux refusés faute de place

$$h_p = x_p - P_p(X) \qquad (9)$$

RESOLUTION DU PROBLEME

Le problème à résoudre est défini par les équations (6) et (7)

$$x_p = A_p u_r \quad (\forall p\in Q_r) \qquad (6)$$

$$\Sigma_{p\in Q_r} x_p - \Sigma_{p\in Q_r} (1-\lambda_p)P_p(X) - d_r^0 = 0 \qquad (7)$$

Ce problème peut être réduit en subtituant dans l'équation (7) les x_p exprimés en fonction des u_r. En appelant U le vecteur des u_r et A la matrice contenant les A_p correctement placés tel que $X = A\cdot U$. le problème devient

$$G_r(U) = u_r - \Sigma_{p\in Q_r} (1-\lambda_p)P_p(A\cdot U) - d_r^0 = 0 \quad (\forall r) \qquad (10)$$

Il s'agit d'un système ayant autant d'équations et de variables qu'il y a de marchés. Les équations sont liées car les P_p sont fonction de plusieurs u_r.

Algorithme de résolution

Ce type de problème se résout par la méthode de Gauss-Siedel non linéaire présentée par Ortega Rheinboldt (70). Il s'agit d'une adaptation directe de la méthode bien connue pour les systèmes d'équations linéaires. La

procédure est la suivante

- Parcourir cycliquement l'ensemble des marchés.
- A chaque marché traité, réajuster la variable u_r de façon à satisfaire l'équation (10)pour ce marché. La méthode de Newton peut être utilisée pour résoudre le sous-problème d'une équation non-linéaire avec une seule inconnue.
- S'arrêter quand toutes les équations sont satisfaites à ε près.

Cet algorithme présente beaucoup d'analogie avec la méthode de décomposition par origine-destination présenté par Nguyen (74) pour la circulation automobile. Les problèmes de chaque O-D y sont réoptimisés à tour de rôle tant que l'optimum n'est pas atteint.

Convergence de l'algorithme.

Une condition suffisante pour la convergence de l'algorithme se définit en utilisant le Jacobien de G défini par les équations (10) et (3)

$$G_r(U) = u_r - \sum_{p\in Q_r} (1-\lambda_p) u_r A_p \sum_{a\in F_p} \frac{Z_a(f_a)}{f_a} - d_r^0 \quad (11)$$

avec $f_a = \sum_{p\in E_a} u_{r_p} A_p$

D'où

$$\frac{\partial G_r(U)}{\partial u_s} = \cdots \quad (12)$$

$$\frac{\partial G_r(U)}{\partial u_s} = \cdots$$

Soit B le triangle inférieur et la diagonale de ce Jacobien et C le triangle supérieur avec un signe négatif. Ortega et Rheinboldt (70) ont démontré que l'algorithme converge quand

$$\rho(B^{-1} C) < 1 \quad (13)$$

où ρ est la norme spectrale.

Cette condition est difficilement vérifiable mais les deux théorèmes suivants des mêmes auteurs permettent d'obtenir une condition suffisante plus facilement utilisable.

Si $J = B - C$, $C \geq 0$, $B^{-1} \geq 0$ et $J^{-1} \geq 0$ (14)

Alors $\rho(B^{-1} C) < 1$

Si $A_{ii} > 0$, $A_{ij} \leq 0$ quand $i \neq j$ et (15)

$A_{ii} \geq \sum_j |A_{ij}|$. Alors A^{-1} existe et $A^{-1} \geq 0$

Etablissons d'abord que $C \geq 0$. Etudions le terme

$$Z_a'(f_a) - \frac{Z_a(f_a)}{f_a}$$. Il est facile de vérifier que $Z_a(0) = 0$ et que $Z_a(f_a)$ est convexe. Donc par l'inégalité du gradient

$$0 = Z_a(0) \geq Z_a(f_a) - Z_a'(\cdot)f_a$$

et par conséquent

$$Z_a'(f_a) - Z_a(f_a)/f_a \geq 0$$

Il en découle que $\frac{\partial G(U)}{\partial u_s} \leq 0$ car tous les facteurs sont positifs et que le tout est précédé d'un signe négatif. Donc $C \geq 0$.

Pour démontrer que $B^{-1} \geq 0$ et $J^{-1} \geq 0$ on utilise (15). Regardons d'abord J^{-1}. Il est évident que $J_{ij} \leq 0$ puisque le Jacobien est symétrique et que sa partie au dessus de la diagonale est égale à -C.

Vérifions simultanément que $J_{ii} > 0$ et que $J_{ii} \geq \sum_j |J_{ij}|$ en démontrant que

$$J_{ii} - \sum_j J_{ij} > 0.$$

$$\frac{\partial G_r(U)}{\partial u_r} - \frac{\partial G_r(U)}{\partial u_s} = 1 - \sum_{p\in Q_r} (1-\lambda_p)A_p \sum_{a\in F_p} \frac{Z_a'(f_a)}{f_a} \quad (16)$$

$$- \sum_{p\in Q_s} (1-\lambda_p)A_p \sum_{a\in F_p} \frac{1}{f_a}\left[\cdots\right] \sum_{a\in Q_s} A_q$$

car $(p) = E_a \cap Q_r$ si $p\in Q_r$ et $a\in F_p$.

D'une part puisque $A_p = \frac{x_p}{u_{r_p}}$, alors

$$u_r \sum_{p\in E_a} A_p = \sum_{p\in E_a} x_p \frac{u_r}{u_{r_p}} \leq f_a \max_s \frac{u_r}{u_s} \quad (17)$$

Les valeurs des u_s ne sont pas très différentes les unes des autres car la division des origines-destinations assure des marchés de tailles semblables. Nous n'utiliserons que $u_r/u_s \leq 1.9$. Ceci permet d'obtenir de (17) que

$$u_r \sum_{p\in Q_r} A_p \leq 1.9\, f_a \quad (18)$$

Etudions d'autre part le reste du dernier terme de (16). En revenant à la définition de Z_a en (1) on obtient facilement que

$$Z_a'(f_a) - \frac{Z_a(f_a)}{f_a} = \frac{c_a}{f_a}\left[1 - F\left(\frac{c_a - f_a}{\sigma_a}\right)\right]$$

F est la fonction de répartition de la loi normale.

Le tableau suivant présente les valeurs de cette expression en fonction de σ_a/f_a et de f_a exprimé en terme de c_a.

Comme les f_a sont généralement plus petits que .8 c_a les $Z_a'(f_a) - Z_a(f_a)/f_a$ sont de l'ordre de .1, .2 ou .3..

Tableau 1: Valeurs de $Z'_a(f_a)-Z_a(f_a)/f_a$

f_a/c_a	.6	.7	.8	.9	1.0	1.1
$\sigma_a/f_a = .3$	.03	.11	.25	.38	.5	.57
$\sigma_a/f_a = .4$	.09	.23	.33	.42	.5	.54

La plupart des routes ne comportant qu'un ou deux arcs et les autres n'ayant que de faibles coefficients d'attraction en a, sauf dans les cas pathologiques, que:

$$\sum_{p\in Q_r} A_p \sum_{a\in F_p} Z'_a(f_a) - \frac{Z_a(f_a)}{f_a} \leq .6 \qquad (19)$$

Finalement les λ_p étant de l'ordre de 20%, 30% ou même 50% nous n'utiliserons que

$$(1 - \lambda_p) \leq .8 \qquad (20)$$

En combinant (18) (19) et (20) le dernier terme de (16) est majoré par

$.6 \times .8 \times 1.9 = .91.$

Etudions maintenant le second terme de (16). $\sum_{a\in F_p} Z_a(f_a)/f_a$ est la proportion des passagers d'une route qui sont refusés. Cette proportion ne dépasse pas 10% dans un réseau ou le service minimal est assuré.

Donc

$$\sum_{p\in Q_r} (1 - \lambda_p) A_p \sum_{a\in F_p} \frac{Z_a(f_a)}{f_a} \leq .8 \times .1 = .08$$

D'où

$$\frac{\partial G_r(U)}{\partial u_r} - \sum_{s\neq r} \frac{\partial G_r(U)}{\partial u_s} \geq 1 - .08 - .91 > 0$$

Les conditions de (15) étant vérifiées, il s'en suit que $J^{-1} \geq 0$. Comme B est obtenu de J en remplaçant par 0 des éléments hors diagonale, il est immédiat que B satisfait aussi les conditions de (15) donc $B^{-1} \geq 0$.

Ceci complète la preuve de convergence dans des conditions normales d'utilisation. Il est possible de construire des exemples pathologiques ou les conditions de convergences ne sont pas satisfaites. Pour plus de sécurité la condition de diagonale dominante peut être vérifiée à chaque itération à partir des valeurs numériques du Jacobien. Si elle n'est pas satisfaite il suffit de revoir la division des marchés pour mieux équilibrer les u_r.

Propriété de la solution

La preuve de convergence assure l'existence et l'unicité de la solution.

Ce modèle et l'algorithme de résolution n'ont pas encore été expérimentés pour les grands problèmes. Par contre un autre modèle présentant une structure mathématique semblable, traite en moins de 25 secondes, le réseau d'Air Canada qui comprend 76 villes et plus de 300 vols (Soumis, 78a). Ainsi, nous prévoyons pouvoir traiter avec ce modèle la plupart des grands réseaux aériens en moins d'une minute.

Le temps de résolution pourra être amélioré en introduisant une relaxation dans la méthode de Gauss-Siedel. Cette modification ne change pas les conditions de convergence.

Finalement, soulignons la stabilité de solution d'un tel modèle. Un système non-linéaire donne des solutions beaucoup plus stables par rapport aux perturbations des données que les modèles de programmation linéaire.

CONCLUSION

Ce modèle est conceptuellement très satisfaisant car il reproduit sans trop de compromis les principales interactions définissant le cheminement des passagers. Du point de vue pratique, il permet d'obtenir économiquement une solution stable. Ces qualités devraient permettre de l'utiliser efficacement dans un processus homme-machine pour évaluer et modifier les horaires. Il peut aussi être intégré à un modèle de génération d'horaire traitant en détail la circulation des passagers et des avions (Soumis, 78b).

Du point de vue méthodologique ce travail présente une innovation pour le traitement des problèmes de transport. L'utilisation des systèmes d'équations non-linéaires et de la méthode de Gauss-Siedel ouvrent la possibilité de traiter efficacement des problèmes définis à partir d'hypothèses de comportement qui ne se ramènent pas à des problèmes de programmation mathématique. Cette propriété est intéressante quand on considère la transparence des modèles définis à partir d'hypothèses de comportement. Le gestionnaire peut discuter les options du modèle sans se heurter au langage mathématique qui n'intervient que pour la résolution.

REFERENCES

Agin, N. (1972). An Algorithm for optimal Aircraft Scheduling. Proceeding NATO Conference, Sanderfjord, Norway.

Daigle, A. (1976). Modification et implantation d'un modèle linéaire pour une planification à moyen terme d'une flotte d'avions. Centre de recherche sur les transports, Univ. de Montréal, Rapport n° 48.

Charnes, A. et Cooper, W. (1961). Multicopy Traffic Network Models. Econometrica, Vol. 29, 767-778.

Dafermos, C. (1971). An Extended Traffic Assignment Model with Application to Two-Way Traffic. Transportation Science, Vol. 5, No. 4.

Gagnon, G. (1967). A model for Flowing Passengers Over Airline Network. Management Science, Vol. 1, No. 3.

Gunn, A. (1964). Airline System Simulation. Operation Research (USA), Vol. 12.

Kingsley, D. (1968). Airline Operation and Planning Model. McDonald Douglas, Long Beach, California. Paper 5058.

Leblanc, L. (1973). Mathematical Programming Algorithms for Large Scale Network Equilibrium and Network Design Problems. Ph.D Thèse, Northwestern University.

Magnantti, T. (1977). Equilibrium on a Congested Network. Conférence présentée à l'Université de Montréal.

Nguyen, S. et Florian, M. (1974). An Algorithm for the Traffic Assignment Problem. Transportation Science, Vol. 8, No. 3.

Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C. (1970). Iterative Solution of Non Linear Equation in Several Variables. Academic Press.

Price, W. et co-auteurs. (1974). Forecasting Traffic in an Air Transportation Network. TIMS/ORSA Meeting, Porto-Rico

Richardson, J. (1976). An Optimization Approach to Routing Aircraft. Transportation Science, Vol. 10, No. 1.

Scarbrough, J. (1977). A Mixed Integer Programming Model for the Scheduling of Aircraft by Time of Day within a Network of Airports. TIMS /ORSA Meeting, San Francisco.

Simpson, R. (1969). Scheduling and Routing Models for Airline Systems. Flight Transportation Lab. M.I.T., Boston.

Soumis, F., Ferland, J. et Rousseau, J.-M. (1978a). Model of Assignment Passengers to Flight Schedule. Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montréal, Rapport 78-09.

Soumis, F., Ferland, J. et Rousseau, J.-M. (1978b). An Integrated Model for Analysing Supply Decision in on Airline. Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montréal, Rapport 78-10.

Soumis, F. (1978c). Planification de flotte d'avions. Ph.D thèse, Université de Montréal.

Swann, W. (1972). The Complete FA-4 Memo. Flight Transportation Lab. M.I.T., Boston.

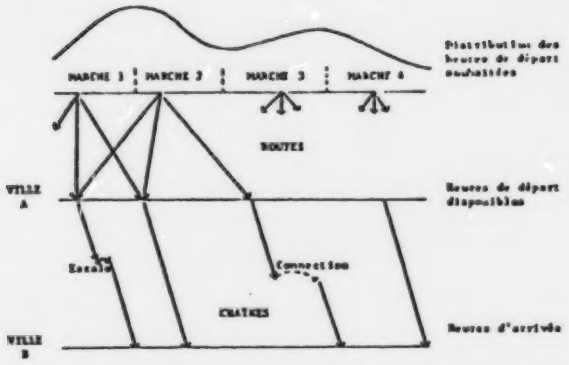

Figure 1: Réseau utilisé par les passagers d'une origine-destination

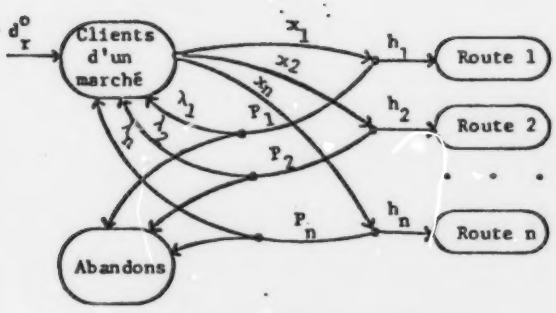

Figure 2: Processus de décision des passagers

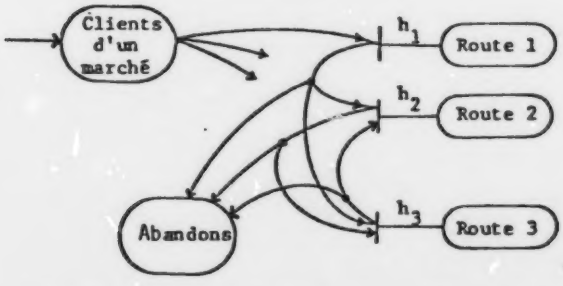

Figure 3: Répartition des passagers refusés parmi les routes non encore essayés